Gráfelmélet előadás

I. előadás

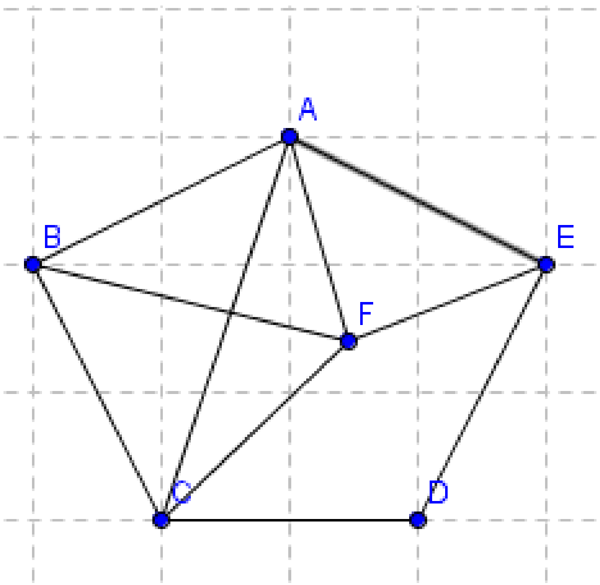
Előadó: Dr. Hajnal Péter

Jegyzetelte: Derányi Edit

A gráfelmélet a kombinatorika egyik igen fontos eleme. Kialakulását több időponthoz is kötik. Van, aki ahhoz az időponthoz rendeli, amikor Euler megoldotta a Königsbergi-hidak problémáját. Vannak olyanok is, akik Guthrienek De Morganhoz intézett kérdésétől (négyszínsejtés korai megfogalmazása) számítják a gráfelmélet kezdetét.

A gráfelmélet elemeit nem csak a matematikában, de a mindennapi életben is gyakran használjuk. Akár úthálózatok ábrázolásához, gazdasági kapcsolatok szemléltetéséhez, vagy molekulák leírásához.

Most nézzük meg, hogy milyen típusait ismerjük a gráfoknak:



1. ábra

Egyszerű gráf: G egyszerű gráf, ha V véges csúcshalmaz, E pedig bizonyos csúcspárok halmaza, amelyet élhalmaznak nevezünk.

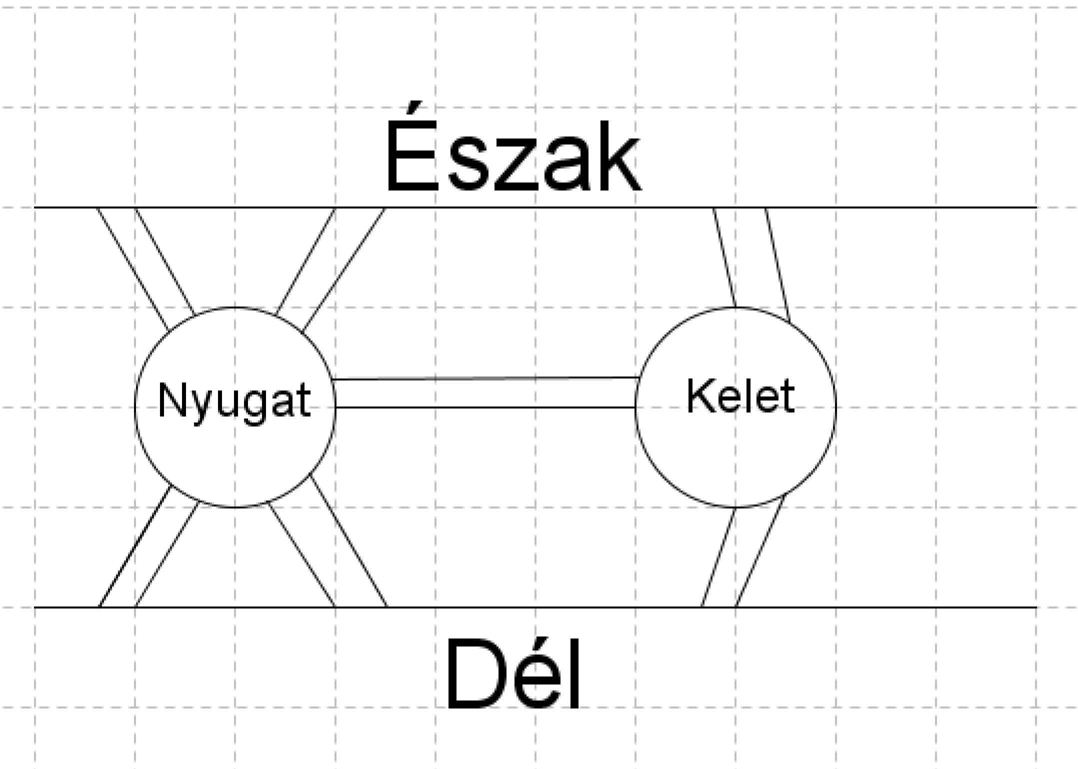
A gráfokat le tudjuk rajzolni. A rajzon a csúcsokat karikákkal, míg a csúcsokat összekötő éleket vonallal szoktuk jelölni.

Az 1. ábrán is jól látható, hogy A, C, F csúcsokhoz sok él kapcsolódik, és D, F között nem áll fent kapcsolat.

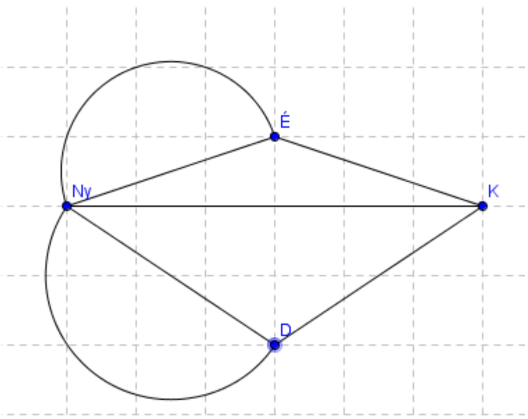
Ha a G gráf egy tanulócsoport viszonyait szemlélteti, akkor egyből láthatjuk, hogy ki az osztály központi személyisége, és ki az, akinek kevés barátja van.

Sokan a gráfot, mint alapfogalmat a kőnigsbergi –hidak problémájára vezetik vissza.

Probléma: A königsbergi hidak problémája egy híres matematikai probléma, amit Leonhard Euler oldott meg. A probléma története, hogy a poroszországi Königsberg (most Kalinyingrád, Oroszország) városban hét híd ívelt át a várost átszelő Prégel folyón úgy, hogy ezek a folyó két szigetét is érintették. A königsbergiek azzal a kérdéssel fordultak Eulerhez, vajon végig lehet-e menni az összes hídon úgy, hogy mindegyiken csak egyszer haladjanak át, és egyúttal visszaérjenek a kiindulópontba. 1736-ban Euler bebizonyította, hogy ez lehetetlen.



2. ábra



3. ábra

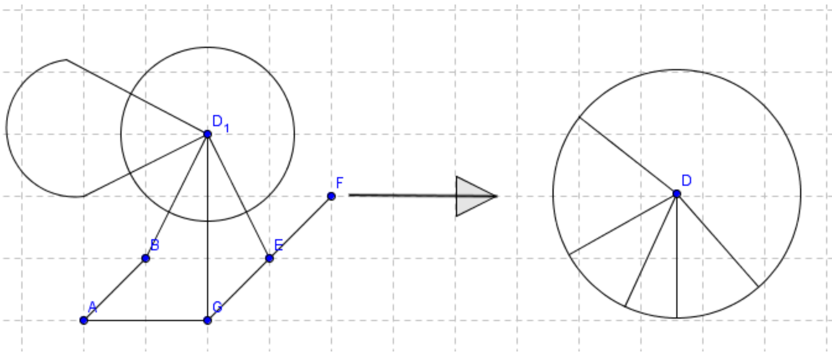
A 2. ábrán is látható, hogy a gráf csúcsai szárazföldi egységek, míg az élek a hidak, melyek két szárazföldi egységet kötnek össze. Ez a gráf viszont nem egyszerű gráf, az élek nem azonosíthatók csúcspárokkal.

Így ez a G gráf V véges csúcshalmazt, E véges élhalmazt tartalmaz, de ezenkívül V és E között fennáll egy illeszkedési reláció, azaz v csúcs e él végpontja.

V, E, I gráfot alkotnak, ha minden élnek két végpontja van, de meg kell jegyeznünk, hogy ez a két végpont egybe is eshet.

A kőnigsbergi-hidakat is ábrázolhatjuk gráfként is. (3. ábra

Vegyünk egy G gráfot, melynek nézzük meg egy csúcsát. ($v \in V$). Ha a v csúcsot nagyítóval vizsgáljuk könnyen meg tudjuk határozni v fokszámát.



4. ábra

A v csúcs fokszáma annyi, amennyi a „napocska sugara". Ebből is látszik, hogy a hurokél a fokszámhoz 2-t ad hozzá. Ezek alapján:

A v csúcs fokszáma kiszámítható:

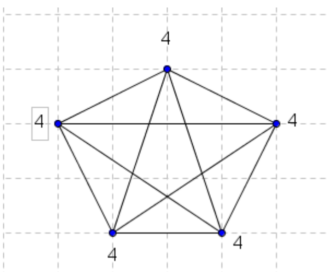
$d(r)= |\{e \in E : \text{e egy v-re illeszkedő nemhurokél}\}| + 2|\{e \in E : \text{e egy v-re illeszkedő hurokél}\}|$

Tétel: G gráf esetén:

$$\sum d(v)=2|E|$$

Bizonyítás: Ha lerajzoljuk a G gráfot, és minden élgörbe két végpontjához írunk egy egyest, akkor a következőt tapasztaljuk: minden élhez 2db egyest írhatunk. Így a válasz 2|E|. Egy másik választ kapunk, ha a csúcsok környezetében található egyeseket vizsgáljuk. Ha megszámoljuk a v csúcs körül d(v) db egyes van, ezeket kell összeadni. A válasz itt tehát $\sum d(v)$. A két válasznak meg kell egyeznie, így visszakapjuk a tétel állítását.

Példa:



5. ábra

K_5 gráf. Ebben az esetben 5 csúcs található, amely 10 élt határoz meg. Minden csúcsból 4 él húzható, így a gráf 4 reguláris.

Egy gráf reguláris, ha minden csúcsának ugyanaz a fokszáma. Egy k reguláris gráf esetén minden csúcsnak k a foka.

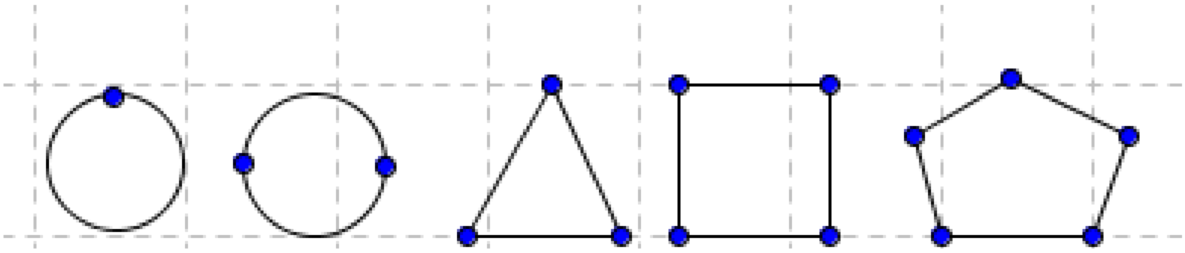
Általánosítva: Egy K_n gráf esetén |V|=n, míg az élek száma $\binom{n}{2}$. K_n reguláris, akkor a fokok közös értéke n-1.

Egy n pontú körgráf esetén az élek és a csúcsok a következőképpen számolhatók:

|E|=n

|V|=n

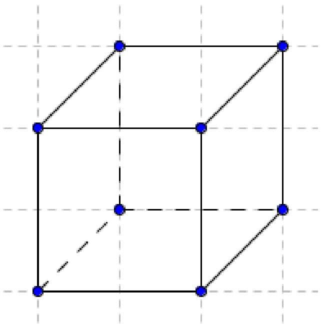
A gráf minden esetben 2 reguláris.



C_1 C_2 C_3 C_4 C_5

6. ábra

Meg kell jegyeznünk, hogy C_1 és C_2 körgráfok nem egyszerű gráfok, míg C_3, C_4, ….C_n igen.



7. ábra

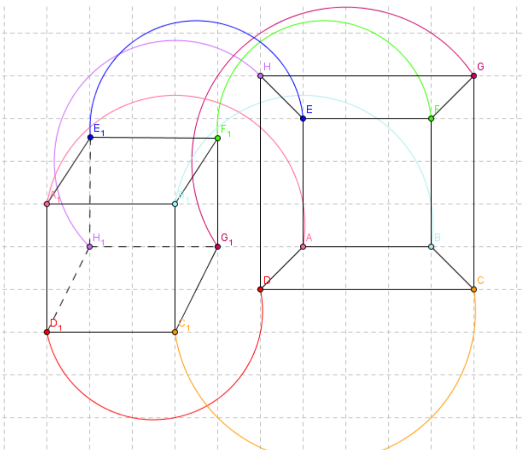
A testekből is képezhetünk gráfokat. Vegyük például egy kockát. Ekkor:

|E|=12

|V|=8

Fokok közös értéke: 3

A gráfoknak többféle lerajzolása is létezik.



8. ábra

<u>Definíció</u>: Izomorf gráfoknak nevezzük azokat a gráfokat, amelyekre létezik olyan φ: V(H) -> V(G) bijekció úgy, hogy ha u,v ∈ V(H) szomszédos pontok esetén φ(u), φ(v) is szomszédos csúcsok is szomszédos csúcsok (G-ben) és megfordítva is igaz.

A 8. ábra a kocka gráfjának két lerajzolását mutatja. Azaz az ábra két izomorf gráfot ábrázol. Az izomorfizmust bizonyító φ bijekció a két gráf csúcsait párokba állítja. Ezeket a párokat összekötéssel szemléltetjük.